Ex.18　证明. 设A 是$n(\geq 2)$ 阶方阵, 则矩阵A 的伴随矩阵为

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

当$rank(A) = n$ 时, $|A| \neq 0$. 由$AA^* = |A|E$ 知$|A^*| = |A|^{n-1} \neq 0$, 所以, $rank(A^*) = n$.

当$rank(A) < n-1$ 时, 矩阵A 的所有$n-1$ 阶子式都为零, 所以, $A^* = 0$, 于是, $rank(A^*) = 0$.

当$rank(A) = n-1$ 时, 矩阵A 至少有一个$n-1$ 阶非零子式, 这说明伴随矩阵A^* 至少有一个元素非零, 因此, $rank(A^*) \geq 1$. 另一方面, 由$rank(A) = n-1 < n$ 知$|A| = 0$, 从而,

$$AA^* = |A|E = 0.$$

于是,

$$rank(A) + rank(A^*) \leq n.$$

所以, $rank(A^*) \leq 1$. 因此, $rank(A^*) = 1$.

注: 书上第100 页的例2.

例2.　设$A_{m\times n}B_{n\times s} = 0$, 则$rank(A) + rank(B) \leq n$.

这个结论可以作为书上第97 页定理5.5.1 的推论.